

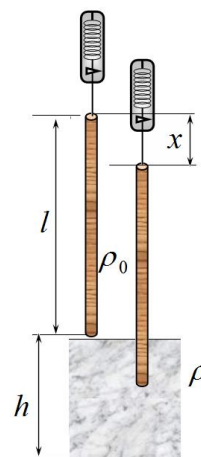
## Задание 1. Разминка (10 баллов)

Задание состоит из 3 не связанных между собой задач.



### Задача 1.1. Тонущий стержень (4 балла)

Однородный стержень длины  $l = 1,0 \text{ м}$  изготовлен из материала плотности  $\rho_0$ . Радиус поперечного сечения стержня значительно меньше его длины. Стержень подвешивают за один из его концов с помощью длинной тонкой невесомой нити к динамометру. Когда стержень свободно висит в воздухе показания динамометра -  $F_0$ . После этого стержень начинают медленно погружать в широкую ванну с жидкостью плотности  $\rho$ . Высота уровня жидкости в ванне равна  $h = \frac{l}{2}$ . Трением стержня о горизонтальное дно ванны пренебрежимо мало. Обозначим высоту, на которую опустил стержень  $x$  (при  $x = 0$  нижний конец стержня касается поверхности жидкости). Показания динамометра при опускании верхнего конца стержня на расстояние  $x$  обозначим  $F(x)$ .



Постройте на бланках в листах ответов графики зависимости отношения  $f(x) = \frac{F(x)}{F_0}$  от величины опускания стержня  $x$ . Задачу решите для двух случаев: а) отношение плотностей жидкости и стержня  $\eta = \frac{\rho}{\rho_0} = 2$ ; б) отношение плотностей равно  $\eta = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2}$ .

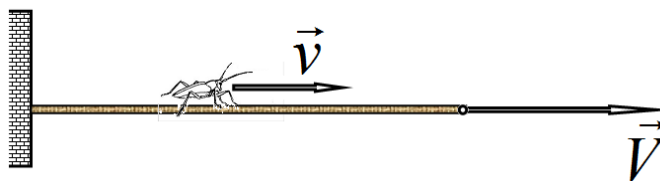
На различных этапах погружения зависимости  $f(x)$  могут описываться разными формулами. Приведите эти формулы для каждого из этапов, диапазоны изменения  $x$  в этих этапах. Нарисуйте положение стержня на каждом этапе. Число этапов в каждом случае определите самостоятельно.



### Задача 1.2. Жук на шнуре (3 балла)

Резиновый шнур длины  $l_0 = 1,0 \text{ м}$  одним концом прикреплен к стене, другой конец шнура тянут с постоянной скоростью  $V = 1,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

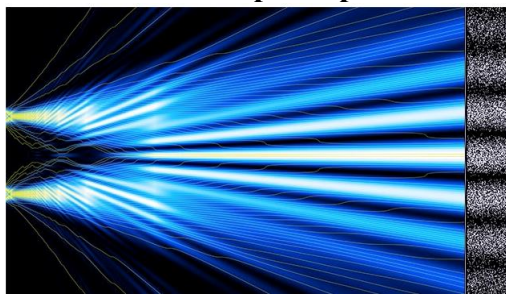
Одновременно с началом растяжения шнура жук начинает ползти по шнуру, стартуя от стенки, с постоянной скоростью  $v = 1,0 \frac{\text{см}}{\text{с}}$  (относительно шнура).



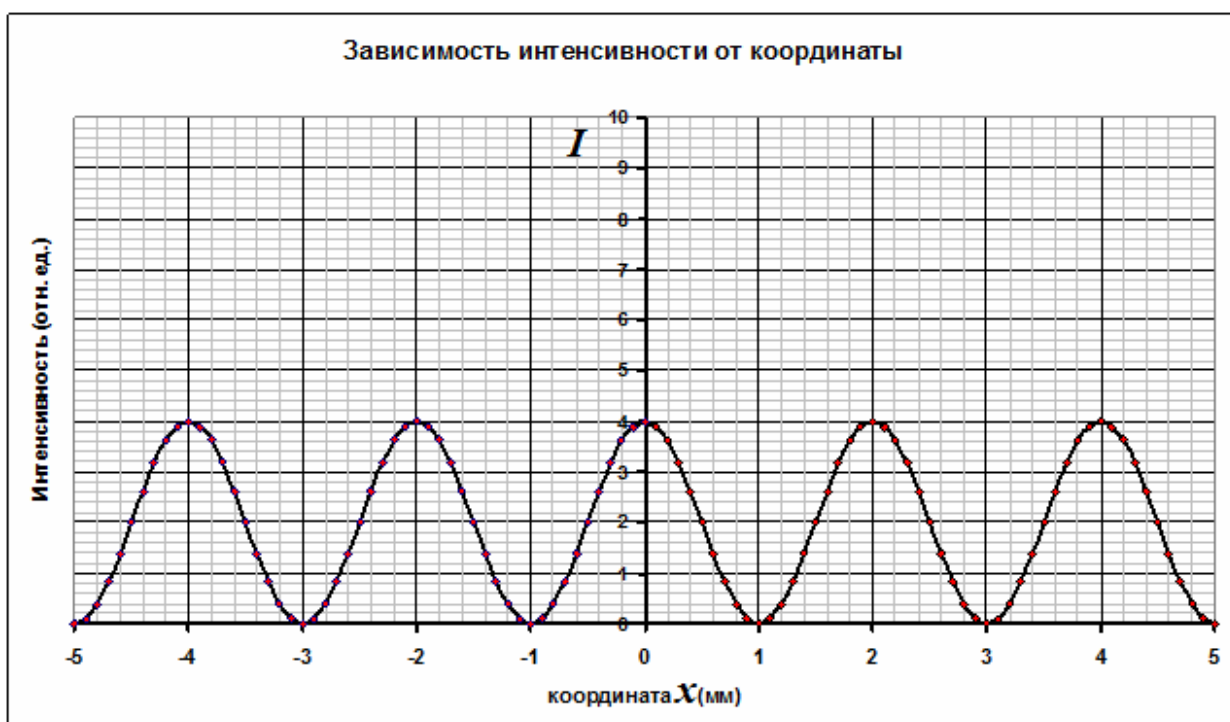
1.2.1 За сколько лет жучок доползет до середины шнура?

1.2.2 За сколько лет он доползет до конца шнура?

## Задача 1.3. Модернизированная схема Юнга (3 балла)



В интерференционной схеме Т. Юнга плоская монохроматическая волна падает нормально на плоскую непрозрачную пластину. В пластине проделаны две одинаковые узкие параллельные щели на небольшом расстоянии друг от друга. На расстоянии значительно большем расстояния между щелями параллельно пластине расположен плоский экран, на котором наблюдается интерференционная картина, состоящая из полос, параллельных щелям в пластине. Зависимость интенсивности света на экране от координаты  $x$  (ось  $x$  лежит в плоскости экрана и перпендикулярна наблюдаемым полосам) показана на графике. Этот график также приведен на листе ответов.



1.3.1. Выведите формулу, описывающую распределение интенсивности света на экране  $I_2(x)$ . Используя приведенный график, определите численные значения параметров этой формулы.

В пластине прорезают третью щель параллельную уже имеющимся щелям и имеющую такую же ширину и расположенную точно по середине между исходными щелями.

1.3.2. Выведите формулу, описывающую распределение интенсивности света на экране в этом случае  $I_3(x)$ . Укажите численные значения параметров этой формулы.

1.3.3. Постройте на бланке в листе ответов график зависимости интенсивности света на экране от координаты  $x$  после того, как в пластине прорезали третью щель.



## Задание 2. Физика попкорна (8 баллов)

Питательная крахмалосодержащая ткань зерна кукурузы имеет снаружи твёрдую оболочку, внутри — мягкое содержимое. В нём находится связанная вода. Когда зерно нагревают вода частично переходит из жидкого в газообразное состояние. При некоторой температуре плотная оболочка зерна не может противостоять давлению паров воды. Она лопается, и крахмал, размягчённый под действием нагрева и давления, расширяется, быстро превращаясь в пенистую структуру, затем охлаждается и застывает. При этом зерна кукурузы превращаются в хлопья попкорна. Для проведения оценок можно считать, что структура ткани зерна подобна мыльной пене, в которой объем стенок пузырей пренебрежимо мал по сравнению с объемом пор.

Можно считать, что вплоть до разрыва объем твердой оболочки зерна кукурузы остается неизменным. Для оценок можно считать, что зерна кукурузы и образовавшиеся хлопья попкорна имеют сферическую форму. Давление газов внутри зерна, при котором происходит разрыв оболочки (при нормальном наружном атмосферном давлении  $P_0 = 1,0 \text{ атм} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ), назовем критическим  $P_{cr}$ .

После разрыва оболочки процесс расширения газов, содержащихся в мягких тканях зерна кукурузы, можно считать адиабатическим. Уравнение этого процесса имеет вид:

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad (1)$$

где  $\gamma$  - показатель адиабаты, который в данном случае можно считать равным  $\gamma = \frac{4}{3}$ .

### Часть 1. Критическое давление разрыва (3,5 балла)

В данной части задачи вам предлагается тремя различными способами оценить давление, при котором происходит разрыв оболочки зерна кукурузы  $P_{cr}$ . В этой части задачи считайте что наружное давление равно нормальному атмосферному давлению.

1.1. Средний радиус зерен кукурузы равен  $r_0 = 3,1 \text{ мм}$ , а средний радиус образовавшихся хлопьев попкорна равен  $r_1 = 6,5 \text{ мм}$ . Используя эти данные, определите, при каком давлении  $P_{cr}$  внутри зерен кукурузы произошел разрыв их оболочки.

1.2. Плотность зерен кукурузы равна  $\rho_0 = 1,3 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , а плотность образовавшихся хлопьев попкорна  $\rho_1 = 0,16 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Используя эти данные, определите, при каком давлении  $P_{cr}$  внутри зерен кукурузы произошел разрыв их оболочки.

Зерно кукурузы покрыто тонкой и прочной оболочкой, толщина которой равна  $h = 0,16 \text{ мм}$ . Максимальное механическое напряжение, которое выдерживает материал оболочки примерно равно  $\sigma_c \approx 10 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

1.3. Определите, какое максимальное давление изнутри может выдержать такая оболочка.

1.4. Укажите, какое значение давления разрыва Вы будете использовать в дальнейших расчетах.



# ТЕОРИЯ - ЗАДАЧИ



## Часть 2. Температура разрыва (3,5 балла)

В данной части задачи вам необходимо оценить температуру, до которой следует нагреть зерна кукурузы  $t_{cr}$  (в градусах Цельсия), чтобы они начали взрываться и образовывать хлопья попкорна. Считайте, что начальная температура зерен равна комнатной температуре  $t = 20^\circ\text{C}$ .

2.1 Предположим, что в порах мягких тканей зерен кукурузы содержится только сухой воздух и при нагревании водяных паров не образуется. В рамках этого предположения рассчитайте, до какой температуры  $t_{cr}$  следует нагреть зерна, чтобы они начали разрываться.

2.2 В реальности в мягких тканях содержится вода, которая при нагревании испаряется. Рассчитайте, до какой температуры  $t_{cr}$  следует нагреть влажные зерна, чтобы они начали разрываться.

Подсказка. Зависимость давления насыщенных паров воды  $P_s$  от температуры  $T$  приближенно описывается уравнением Клапейрона – Клаузиуса

$$P_s = P_0 \exp \left[ \frac{ML}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right]. \quad (2)$$

где  $M = 18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$  - молярная масса воды,  $L = 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$  - удельная теплота испарения воды,  $R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  - универсальная газовая постоянная. Напоминаем, что при нормальном атмосферном давлении  $P_0 = 1,0 \text{ атм} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$  вода кипит при температуре  $t_0 = 100^\circ\text{C}$  ( $T_0 = 373\text{K}$ ).

2.3. Оцените, какая масса воды должна испариться, чтобы давление внутри зерна достигло критического значения  $P_{cr}$ .

## Часть 3. Суперпопкорн (1 балл)

Для увеличения объема образующихся хлопьев попкорна, нагревание зерен кукурузы проводят при пониженном внешнем давлении  $P_1$ .

3.1. Оцените, при каком наружном давлении  $P_1$  во время нагревания зерен, средний объем образующихся хлопьев попкорна будет примерно в 2 раза больше, чем при нормальном атмосферном давлении.

### Примечание.

Все численные данные этой задачи взяты из статьи:

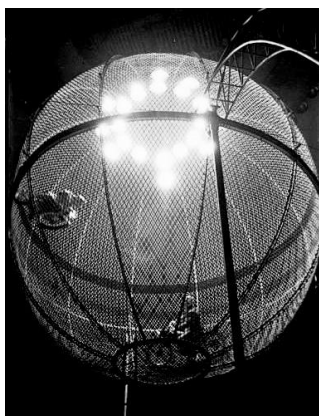
Popcorn: critical temperature, jump and sound

Emmanuel Virost, Alexandre Ponomarenko

Published: 06 March 2015, «Journal of the Royal Society Interface».

<https://doi.org/10.1098/rsif.2014.1247>





## Задание 3. Внутри сферы (12 баллов)

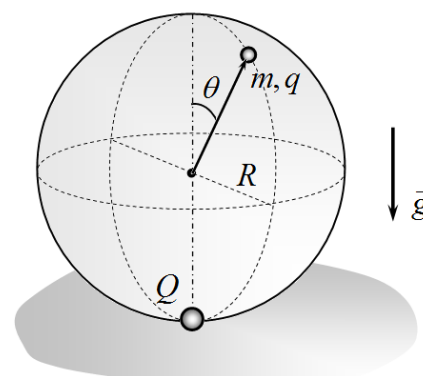
Внутри непроводящей сферы радиуса  $R$  в ее нижней точке закреплен точечный заряд  $Q$ . По внутренней поверхности сферы может двигаться без трения небольшой шарик (радиус которого значительно меньше радиуса сферы) массы  $m$  и несущий заряд  $q$ , на который также действует сила тяжести. Знаки зарядов совпадают. Положение шарика на внутренней поверхности сферы определяется углом  $\theta$ , отсчитываемым от вертикали.

Поляризационными эффектами и трением на поверхности сферы следует пренебречь.

Для сокращения алгебраических выкладок и укорочения формул, введем безразмерный параметр:

$$f = \frac{Qq}{16\pi\epsilon_0 R^2 mg}, \quad (1)$$

имеющий смысл отношения силы электростатического взаимодействия зарядов (когда шарик находится в верхней точке) к силе тяжести, действующей на шарик.



### Часть 1. Общие характеристики.

- 1.1. Запишите выражение для полной потенциальной энергии шарика  $U(\theta)$  при его смещении от верхней точки, как функцию угла  $\theta$ . Примем, что потенциальная энергия шарика в верхней точке равна нулю. Ответ выразите через параметры  $m, g, R, f$ .
- 1.2. Запишите выражения для модулей моментов силы тяжести  $M_g(\theta)$  и кулоновской силы  $M_e(\theta)$  относительно центра сферы, как функции угла  $\theta$ . Ответ выразите через параметры  $m, g, R, f$ .
- 1.3. Постройте на одном бланке в листе ответов схематические графики зависимостей модулей моментов сил, действующих на шарик  $M_g(\theta)$  и  $M_e(\theta)$ , от угла отклонения  $\theta$  при  $f = 1,0$ ,  $f = 2,0$ ,  $f = 3,0$ .
- 1.4. Постройте на одном бланке в листе ответов схематические графики зависимостей потенциальной энергии шарика  $U(\theta)$  от угла отклонения  $\theta$  при  $f = 1,0$ ,  $f = 2,0$ ,  $f = 3,0$ .

Примечание. При построении схематических графиков нет необходимости проводить численные расчеты: укажите участки возрастания и убывания, наличие экстремумов.



# ТЕОРИЯ - ЗАДАЧИ



- 1.5. Рассчитайте, при каких значениях параметра  $f$  шарик не будет отрываться от внутренней поверхности сферы в процессе движения.
- 1.6. Рассчитайте, при каких значениях параметра  $f$  шарик может находиться в верхней точке сферы в положении устойчивого равновесия.

## Часть 2. Движение шарика при $f = 1$

Подвижному шарiku сообщили такой электрический заряд, что безразмерный параметр оказался равным  $f = 1$ . В начальный момент времени шарик покоится в верхней точке сферы, а затем начинает скользить по ее внутренней поверхности.

- 2.1. Определите, на какой максимальный угол  $\theta_{\max}$  отклонится шарик в процессе движения.
- 2.2. Определите, при каком угле  $\bar{\theta}$  шарик может находиться в положении устойчивого равновесия.
- 2.3. При каких углах  $\theta$  шарик может двигаться по горизонтальной окружности по внутренней поверхности сферы?

## Часть 3. Движение шарика при $f = 2$

Подвижному шарiku сообщили такой электрический заряд, что безразмерный параметр оказался равным  $f = 2$ . В начальный момент времени шарик покоится в некоторой точке на внутренней поверхности сферы, отклоненной от вершины на малый угол  $\theta_0$ . Шарик отпускают без начальной скорости, и он начинает колебаться в вертикальной плоскости.

- 3.1 Найдите, как зависит период колебаний шарика от угла начального отклонения  $\theta_0$ .

*Примечание.* Вам следует получить формулу, которая может содержать неизвестный безразмерный коэффициент пропорциональности.

## Часть 4. Движение шарика при $f = 3$

Подвижному шарiku сообщили такой электрический заряд, что безразмерный параметр оказался равным  $f = 3$ . В начальный момент времени шарик покоится в верхней точке сферы, а затем ему сообщают малую скорость  $v_0$ , направленную вдоль поверхности сферы.

- 4.1. Определите период малых колебаний шарика в этом случае.

Когда шарик находился в нижней точке, когда скорость шарика стала равной нулю, ему толчком сообщают некоторую скорость  $v_1$  направленную горизонтально вдоль поверхности сферы.

- 4.2. При каком значении скорости  $v_1$  шарик будет далее двигаться по горизонтальной окружности?